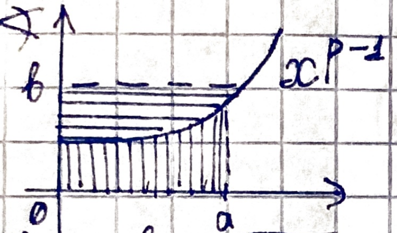
11 Неравенство Гельдера, Минковского, полнота пространства L_p, непрерывность в среднем из функции

- $f \in L_p$ $(p \geq 1)$, if $\int_X |f(x)|^p d\mu$ $\exists$.

$\|f\|_{L_p} = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{1/p}$

1) $\|f\| > 0$
2) $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$ } Очевидно
3) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

▲ Лемма $\exists$ $a, b > 0$, $p \geq 1$; $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

△


$S_1 = \int_0^a x^{p-1} dx = \frac{a^p}{p}$

$S_2 = \int_0^b x^{q-1} dx = \frac{b^q}{q}$ ■

Т (Нер-во Гельдера) $\exists$ $f \in L_p$, $g \in L_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$. Тогда fg интегр. и $\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q}$

▲ $\exists$ $\|f\|_{L_p} \neq 0$, $\|g\|_{L_q} \neq 0$. Обозн. $F(x) = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L_p}}$, $G(x) = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L_q}}$, $F, G \geq 0$.

Тогда $FG \leq \frac{F^p}{p} + \frac{G^q}{q}$, причем F^p, G^q интегр. $\Rightarrow$ FG интегр. $\Rightarrow$ fg интегр.

$\int_X FG d\mu \leq \frac{1}{p} \int_X F^p d\mu + \frac{1}{q} \int_X G^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$\int_X \frac{|f||g|}{\|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q}} d\mu \leq 1 \Rightarrow \int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_{L_p} \cdot \|g\|_{L_q}$ ■

Т (Нер-во Минковского) If $f, g \in L_p$, то $(f+g) \in L_p$ и $\|f+g\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_p} + \|g\|_{L_p}$, причем нер-во обращ-ся в рав-во $\Leftrightarrow$ $f = c \cdot g$ п.в.

▲ $|f+g|^p \leq 2^p (|f|^p + |g|^p)$ $\Rightarrow$ $f+g$ интегр.

$\|f+g\|^p_{L_p} = \int_X |f+g|^p d\mu = \int_X |f+g|^{p-1} |f+g| d\mu \leq \int_X |f+g|^{p-1} |f| d\mu + \int_X |f+g|^{p-1} |g| d\mu \leq_{\text{Нер-во Гельдера}} \leq \|f\|_{L_p} \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q} d\mu\right)^{1/q} + \|g\|_{L_p} \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q} d\mu\right)^{1/q} = \left(\|f\|_{L_p} + \|g\|_{L_p}\right)\left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{1/q} \Rightarrow \left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{1/p} \leq \|f\|_{L_p} \cdot \|g\|_{L_p}$.

Заметим, что if $|f+g| = |f| + |g|$, то $\text{sgn}(f) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \text{sgn}(g)$

Кроме того, $|f|^{p-1} \stackrel{\text{п.в.}}{=} |f+g|^{p-1} \cdot C_1$ и $|g|^{p-1} \stackrel{\text{п.в.}}{=} |f+g|^{p-1} C_2$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow |f| \overset{\text{п.в.}}{=} c|g|$ ■

V. Пр-во L_p полно /$\forall$ фунд. посл-ть есть сход-ся посл-ть/

▲ 1) $\mu(X) < \infty$. $\forall f \in L_p$ $f \in L_1$ (т.е. $L_p \subset L_1$), ибо $\int\limits_X |f| d\mu \le \|f\|_{L_p} \cdot \left(\int\limits_X 1^q d\mu\right)^{1/q}$. Пусть f_n - фунд-на т.е. $\|f_n - f_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$. Выберем подп-ть $f_{n_k} \xrightarrow{\text{п.в.}} f(x)$. Пусть $F_k(x) = f_{n_k}(x)$, F_k - фунд. в L_p
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n \ge N$ $\|F_n - F_{n+m}\|_{L_p} < \varepsilon$ $\forall m \ge 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \int\limits_X |F_n - F_{n+m}|^p d\mu \le \varepsilon^p \Rightarrow |F_n - F_{n+m}|^p \to |F_n - f|^p$ при $m \to \infty$. По т. Фату, $|F_n - f|^p$ - интегр. и $\int\limits_X |F_n - f|^p d\mu \le \varepsilon^p$. Тогда $(f - F_n) + F_n = f \in L_p$, $\|F_n - f\|_{L_p} \le \varepsilon$, $n \ge N$. $\Rightarrow \|f_{n_k} - f\|_{L_p} \xrightarrow[n_k \to \infty]{} 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \|f_n - f\|_{L_p} \to 0$.

2) $\mu(X) = \infty$; $X = \bigsqcup\limits_{k=1} X_k$, $\mu(X_k) < \infty$. f_n фунд. в $L_p \Rightarrow$
$\Rightarrow f_n$ фунд. в $L_p(X_k)$
X_1: сход. п.в. $f_{11}, \dots, f_{1n}, \dots$ Положим $F_n = f_{nn}$.
X_n: сход. п.в. $f_{n1}, \dots, f_{nn}, \dots$
Тогда F_n сх-ся п.в. к некоторой f на $X \Rightarrow \|f_n - f\|_{L_p} \to 0$ при $n \to \infty$. Ч.Т.D. ■

V. If $f \in L_p(\mathbb{X})$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta$: как только $|\Delta| < \delta$, то $\|f(\cdot + \Delta) - f(\cdot)\|_{L_p} < \varepsilon$ по мере dx (Непр-ть в среднем ф-ций из L_p)

▲ 1) Дост-но д-ть для X-огр. (Иначе, $\int\limits_X |f(x)|^p dx < \infty \Rightarrow \int\limits_{|x|>R} |f|^p dx \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$ (Остаток сх ~~шар~~ ряда). Так что всегда можно найти шар, т.ч. $\|f(\cdot + \Delta)\|_{|x|>R} < \varepsilon$, $\|f(\cdot)\|_{|x|>R} < \varepsilon$)

2) Итак, пусть X-огр; пусть оно содер. в шаре радиуса R ($f \equiv 0$ вне X). В шаре $\exists \varphi$ - непр., $\|f - \varphi\|_{L_p(|x| < R+1)} < \varepsilon$, $\varphi(x)$ непр. в замкнутом шаре рад. $R+1$.
Берем произвольное $\varepsilon > 0$. $\|f(\cdot + \Delta) - f(\cdot)\|_{L_p(|x| < R)} \le$
Возьмем $|\Delta| < 1$; $\le \underbrace{\|f(\cdot + \Delta) - \varphi(\cdot + \Delta)\|_{L_p(|x| < R)}}_{< \varepsilon}$
$+ \underbrace{\|\varphi(\cdot + \Delta) - \varphi(\cdot)\|_{L_p(|x| \le R)}}_{< \varepsilon \text{ в силу непр-ти: } \exists \delta,\ |\Delta| < \delta} + \underbrace{\|\varphi(\cdot) - f(\cdot)\|_{L_p(|x| < R)}}_{< \varepsilon}$ и всё хорошо. ЧТD ■